Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις

Τετάρτη 15-6-2016, 3-6 μ.μ.

1. Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'(x) = x^2cos^2y + ysin^2x, \quad y(0) = 1.$$

και να διατυπωθεί (στην γενικότητά του) το Θεώρημα που χρησιμοποιήθηκε.
Υποδ.: Θεωρείστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^2cos^2y + ysin^2x$ και χρησιμοποιείστε το Θεώρημα 1, (σελ. 12) στο $R = \{|x| \le a, |y - 1| \le b\}$ για $a, b > 0$. (Επίσης, και το Θεωρ. 2 σελ. 17, με $S = \{|x| \le a\}$ για $a > 0$.

2. Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'siny = cosx(2cosy - sin^2x).$$

Να βρεθεί λύση y_0 με $y_0(0) = \frac{\pi}{2}$ και να εξετασθεί αν υπάρχουν θετικές λύσεις στο $[0, +\infty)$.
Υποδ.: Για $z = cosy$ η εξίσωση ανάγεται στην γραμμική δ.ε. $z' + 2cosxz = cosxsin^2x$. Είναι

$$cosy(x) = z(x) = \frac{1}{2}sin^2x - \frac{1}{2}sinx + \frac{1}{4} + Ce^{-2sinx}$$

Για $y_0(0) = \frac{\pi}{2}$ βρίσκουμε $0 = \frac{1}{4} + C$ ενώ για τα πεδία ορισμού των λύσεων θα πρέπει να είναι $|cosy(x)| \le 1$.

3. *Μέθοδος μεταβολής των σταθερών:* Να διατυπωθεί (λεπτομερώς) και να αποδειχθεί το θεώρημα το σχετικό με την εύρεση μιας μερικής λύσης της εξίσωσης

$$a_3(x)y'''(x) + a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x), \quad x \in I.$$

Υποδ.: Διαμορφώστε κατάλληλα το Θεώρημα 14, σελ. 86.

4. Να λυθεί η εξίσωση $(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$ και να προσδιοριστεί η λύση της με $y(1) = \sqrt{17}$. Υπάρχουν λύσεις της εξίσωσης με πεδίο ορισμού της μορφής $[a, +\infty)$·
Υποδ.: Εύκολα προκύπτει ότι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας είναι $P(x) = x$ και

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2y^2}{2} = C$$

από όπου με αντικατάσταση προκύπτει η τιμή της σταθεράς C για την αρχική τιμή που δόθηκε και ότι για τα πεδία ορισμού των λύσεων θα πρέπει $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \le C$.

5. Αν y είναι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y''(x) + k^2y = Acos(kx), \quad x \ge 0, \quad y_0(0) = 0, y'(0) = 1,$$

όπου k, A είναι θετικές σταθερές, να εξετασθεί το πλήθος των θετικών λύσεων της εξίσωσης $y(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$.
Υποδ.: Άσκηση Β-20, σελ. 31 Φυλ. Λυμ. Ασκ.. Για κατάλληλες ακολουθίες $x_n, z_n \to +\infty$ είναι $y(x_n)y(z_n) < 0$.

6. Να λυθεί η εξίσωση

$$3dy - y[(1-2x)y^3 - 1]dx = 0, \quad x \geq 0, \quad (E)$$

Να εξετασθεί αν υπάρχουν λύσεις α) με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$, β) με πεδίο ορισμού το $[0, 2016)$, γ) ταλαντούμενες. Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο το π.α.τ. (E) - ($y(0) = 0$).

Υποδ.: Η εξίσωση γράφεται $3y' + y = (1-2x)y^4$ που είναι μια εξίσωση Bernoulli. Βρίσκουμε

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{Ce^x - 2x - 1}}$$

από όπου προκύπτουν άμεσα απαντήσεις στα α), β), γ). Ύπαρξη και το μονοσήμαντο το π.α.τ. με το Θεώρημα 1, σελ. 12.

7(A). Για την διαφορική εξίσωση $x^3y'' + xy' - y = 0$, α) να αποδειχθεί ότι το $x_0 = 0$ είναι ένα μη κανονικό ανώμαλο σημείο β) να επιλυθεί η εξίσωση στο διάστημα $(0, \infty)$.

Υποδ.: Παρατηρείστε ότι μία λύση είναι η $y_1(x) = x$. Μία δεύτερη λύση προκύπτει από υποβιβασμό της τάξης. [Άσκηση C-9, σελ. 55-56 Φυλ. Λυμ. Ασκ.]

7(B). Να λυθεί η εξίσωση $(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0$ γύρω από το σημείο $x_0 = 0$. Να εξετασθεί αν υπάρχουν άρτιες ή περιττές λύσεις και να προσδιοριστούν τα πεδία ορισμού τους.

Υποδ.: Το $x_0 = 0$ είναι ένα ομαλό σημείο. Επίλυση με χρήση του Θ. 1, σελ. 236. Προκύπτει

$$2c_2 = c_0, \quad c_3 = 0, \quad c_{n+2} = -\frac{n-1}{n+2}c_n, \quad n \geq 2.$$

Μια περιττή λύση είναι η $y_1(x) = x, x \in \Re$ και μία άρτια η $y_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + ..., |x| < 1$.